

# Formeln und Rechenwege

**Investition und Finanzierung**

Frage

Wie lautet die einfache Zinsformel?

## Antwort

$$C_t = C_o \cdot (1 + r \cdot t)$$

Frage

Wie lautet die Zinseszinsformel?

## Antwort

$$C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$$

Wie hoch ist der Zins, den man benötigt, um einen vorgegebenen Endbetrag in einer vorgegebenen Zeit bei vorgegebenem Startkapital zu erreichen?

Bsp.: 50.000 € werden in  $t_0$  für 20 Jahre angelegt. Nach 20 Jahren kommen 78.000 € zur Auszahlung. Wie hoch ist  $r$ ?

Antwort

$$C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$$

Nach „r“ auflösen!

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + r)^T$$

$$\sqrt[T]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = r$$

$$\sqrt[20]{\frac{78.000}{50.000}} - 1 = 2,2483 \%$$

Wie lange dauert es, bis ein vorgegebenes Endkapital bei vorgegebenem Startkapital und vorgegebenem Zins erreicht wird?

Bsp.:  $r = 4 \%$ ,  $C_0 = 50.000 \text{ €}$ ,  $C_n = 100.000$



Antwort

$$C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$$

Nach „t“ auflösen!

$$\log C_n = \log C_0 + t * \log(1 + r)$$

$$\frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1 + r)} = t$$

$$\log 100.000 - \log 50.000$$

$$\text{-----} = 17,67 \text{ Jahre}$$

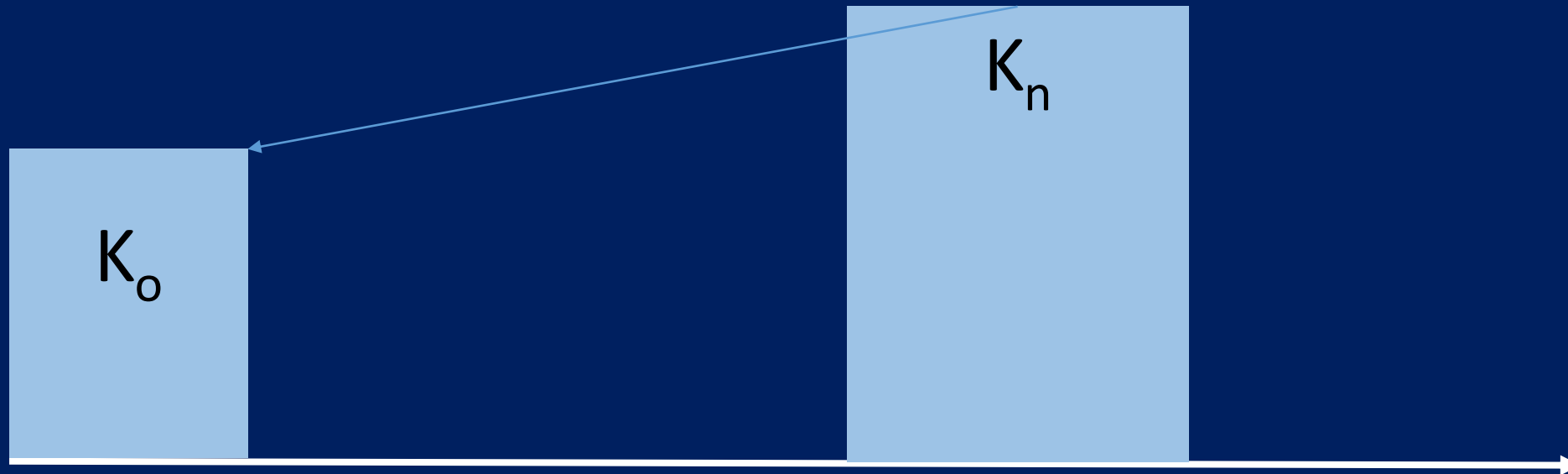
$$\log (1 + 0,04)$$

**Logarithmus:** Aus  
Potenzierung wird Addition!

# Frage

## Wie lautet der Abzinsungsfaktor?

Erläuterung: Zinst einen nach  $n$  Perioden fälligen Geldbetrag  $K_n$  unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins auf einen jetzt fälligen Geldbetrag  $K_0$  ab.



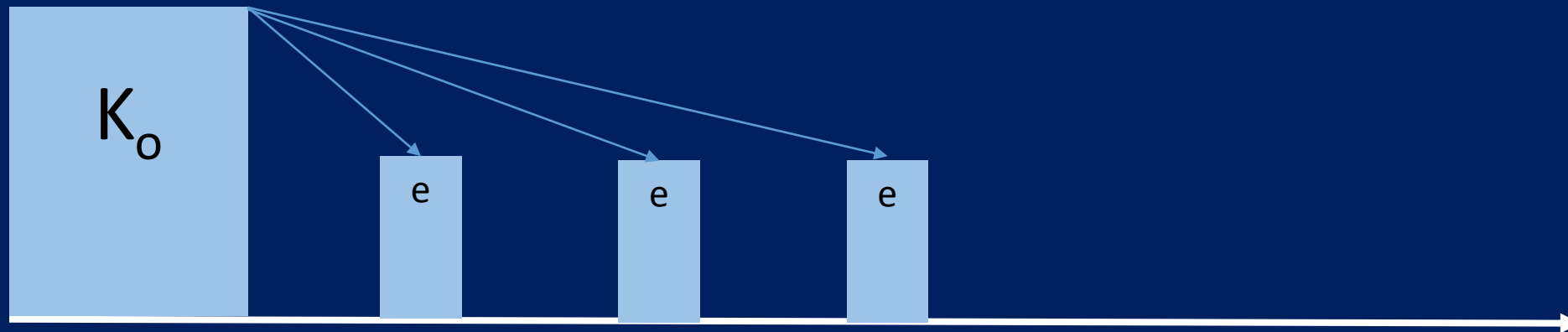
Antwort

$$\frac{1}{(1+r)^T}$$

# Frage

Wie berechnet man die Annuität?

Erläuterung: Der sogenannte Kapitalwiedergewinnungsfaktor (KWF) verteilt einen Betrag zum Zeitpunkt  $t = 0$  in gleich hohe Beträge unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins auf  $n$  Periode ( $e$  entspricht einer Annuität)



$$\frac{(1+r)^t * r}{(1+r)^t - 1} = ANF * K_0 = AN$$

Eine Hypothekenbank bietet ein Darlehen über 100.000 € mit einer Laufzeit von 20 Jahren zu einem Zinssatz von 7 % an.

Wie hoch ist der Zins- und Tilgungsanteil im letzten Jahr der Darlehenslaufzeit?

## Annuität:

$$\text{Annuität} = CO * \frac{(1+r)^T * r}{(1+r)^T - 1}$$

$$100.000 * \frac{(1+0,07)^{20} * 0,07}{(1+0,07)^{20} - 1} = 9.439,29$$

$$9.439,29 \text{ €} - (x * 1,07) = 0$$

$$\frac{9439,21}{1,07} = x$$

$$X (\text{Restschuld}) = 8.821,6916 \text{ €}$$

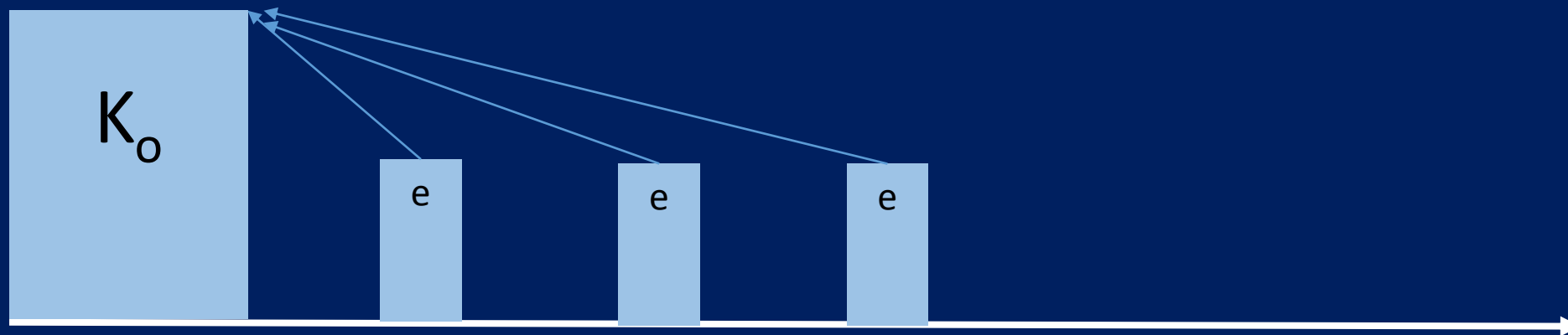
bzw.  $9.439,29 - 7.000$  (Zinsanteil 1. Rate) =  $2.349,29$  Tilgungsanteil 1. Rate!  
 $2.349,29 * 1,07^{19} = 8.821,27 \text{ €}$

Letzte Rate: Tilgungsanteil:  $8.821,27 \text{ €}$  und Zinsanteil  $618,02 \text{ €}$

# Frage

Wie berechnet man den Barwert?

Erläuterung: Der Barwertfaktor zinst gleich hohe Zahlungen  $g$  einer Zahlungsreihe auf den Zeitpunkt  $t = 0$  ab und addiert sie gleichzeitig. Multipliziert man den Barwertfaktor mit einer Zahlung  $e$  erhält man den Barwert.





## Antwort

$$e * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^T}}{r}$$

### Prämissen:

- (1) Konstanter Zinssatz**
- (2) Konstante Einzahlungen**

Ein Lottogewinner erhält 20 Jahre lang jeweils am Jahresende nachschüssig 10.000 EUR ausgezahlt. Welches Kapital liegt den Auszahlungen bei einem Zinssatz von 8 % zugrunde?

Antwort

$$e * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^T}}{r}$$

$$10000 * \frac{1 - \frac{1}{(1+0,08)^{20}}}{0,08} = 98.181,47 \text{ €}$$

Zur vorherigen Aufgabe („Lottogewinner“):

Welches Kapital liegt zugrunde, wenn

- a) für  $t_1 - t_{10}$  von 10 % und für  $t_{11} - t_{20}$  von 6 %
- b) für  $t_1 - t_{10}$  von 6 % und für  $t_{11} - t_{20}$  von 10 %  
auszugehen ist?

## Antwort

$$\text{a) } 10.000 * \text{RBF}(10, 10\%) + 10.000 * \text{RBF}(10, 6\%) * 1,1^{-10}$$

$$\text{b) } 10.000 * \text{RBF}(10, 6\%) + 10.000 * \text{RBF}(10, 10\%) * 1,06^{-10}$$

$$\text{RBF}(10/10\%) = \frac{1 - \frac{1}{(1+0,1)^{10}}}{0,1} = 6,14456$$

$$\text{RBF}(10/6\%) = \frac{1 - \frac{1}{(1+0,06)^{10}}}{0,06} = 7,36008$$

$$\text{a) } 10.000 * 6,14456 + 10.000 * 7,36008 * 1,1^{-10} = 89.821,89 \text{ €}$$

$$\text{b) } 10.000 * 7,36008 + 10.000 * 6,14456 * 1,06^{-10} = 107.911,70 \text{ €}$$

Frage

Wie ermittelt man den Kapitalwert?

## Antwort

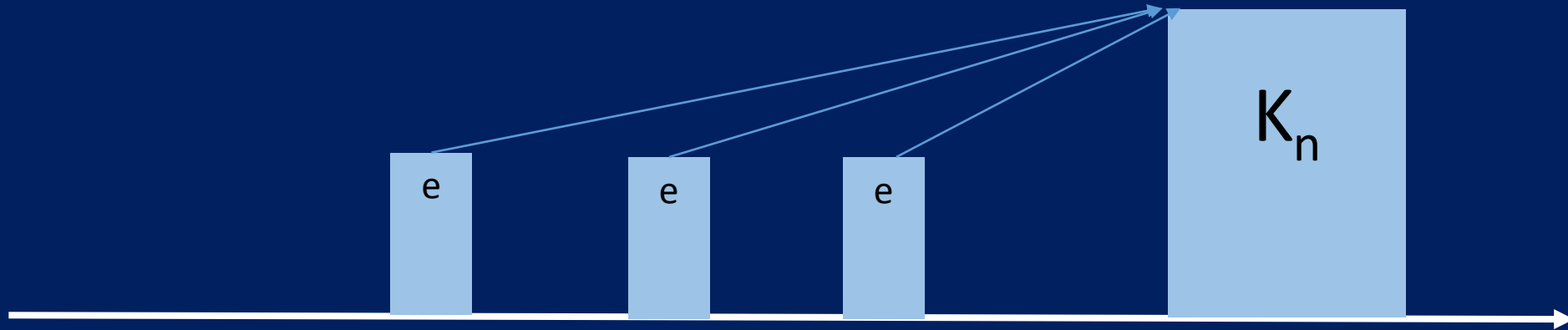
Indem man zum Barwert noch die Ausgabe in  $e_0$  addiert

$$K = e * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^T}}{r} + e_0$$

# Frage

Wie ermittelt man den Endwertfaktor?

Erläuterung: Der Endwertfaktor zinst die gleich hohen Einzahlungen  $e$  auf und addiert gleichzeitig die Endwerte (z. B. Sparvertrag).





Antwort

$$e * \frac{(1 + r)^T - 1}{r}$$

# Interner Zinsfuß

Eine Investition setzt sich aus folgender Auszahlung und Einzahlung zusammen:

$$\begin{array}{ll} t = 0 & e_0 = -1.000 \\ t = 1 & e_1 = + 2.345 \end{array}$$

Wie lautet der interne Zinsfuß?

Antwort

$$\frac{e1}{-e0} - 1$$

$$\frac{2.345}{1.000} - 1 = 1,345 = 134,50 \%$$

Kontrolle:

beim internen Zinsfuß ist  $K = 0$

$$-1.000 + \frac{2.345}{(1 + 1,345)} = 0$$